Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Костромской государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Директор по учебно-методической работе
Л.И. Тимонина

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ В АСПИРАНТУРУ

направление подготовки 01.06.01 Математика и механика

направленность Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Составитель:
доцент, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
К.Е. Ширяев

Кострома,
2020

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Вступительное испытание проводится в соответствии с Правилами приема в КГУ, Регламентом проведения вступительных испытаний и Программой вступительного испытания.

Вступительное испытание по специальной дисциплине, соответствующей направленности подготовки («Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление») фактически повторяет классический курс обыкновенных дифференциальных уравнений.

В программу испытания необходимо входят темы, посвященные теореме существования и единственности задачи Коши, теория линейных систем, теория уравнений с постоянными коэффициентами, а также теоремы непрерывности и дифференцируемости по параметру.

Форма проведения вступительного испытания (очно) – письменное тестирование и устный опрос.

Продолжительность вступительного испытания (очно) – письменное тестирование – 60 мин., устный опрос – 60 мин./чел.

Форма проведения вступительного испытания (дистанционно) – онлайн-тестирование и устный опрос.

Продолжительность вступительного испытания (дистанционно) – онлайн-тестирование – 60 мин., устный опрос – 60 мин./чел.

Онлайн-тестирование проходит в системе дистанционного обучения (СДО).

Устный опрос участников испытаний (при дистанционной форме) проходит с помощью сервиса Zoom.

Результаты вступительных испытаний в аспирантуру оцениваются по 100-балльной шкале.

При проведении вступительного испытания по специальной дисциплине, соответствующей направленности подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре баллы начисляются следующим образом:

– до 50 балов – за письменную часть вступительного испытания;

– до 50 баллов – за устный ответ на вопросы билета;

Письменная часть вступительного испытания содержит 10 заданий. За правильное выполнение каждого задания начисляется 5 баллов. В случае получения за письменную часть более 20 баллов абитуриент допускается к устной части вступительного испытания.

Каждый билет устной части вступительного испытания содержит два теоретических вопроса. За законченный ответ на теоретический вопрос билета (включая все заданные дополнительные вопросы) абитуриент может получить не более 25 баллов. В качестве дополнительных вопросов могут быть предложены базовые определения, формулировки основных теорем, несложные доказательства или задачи, иллюстрирующие теоретические факты.

Требования, предъявляемые к устному ответу, включают в себя два критерия – полноту ответа и правильность доказательств. Определения должны быть исчерпывающими и полными, формулировки теорем должны не содержать неописанных выше понятий, а что касается доказательств, то они могут содержать ссылки на недоказанные теоремы из курсов математического анализа, теории функций, линейной алгебры и геометрии в объеме вузовского курса.

ЗАДАНИЯ ПИСЬМЕННОЙ ЧАСТИ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

1. Первым интегралом уравнения $y' = xy$ является…

1) $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$, C – любое 2) $|y| = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, $C > 0$

3) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, C – любое 4) $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$, $C > 0$

2. Общим решением уравнения $y' = \frac{y-1}{x}$ является…

1) $y = 1 + Cx$, C – любое 2) $\ln|y-1| = \ln|x| + C$, C – любое

3) $y = 1 + Cx$, $C > 0$ 4) $\ln|y-1| = \ln|x| + C$, $C > 0$

3. В уравнении $y' = \frac{1-y^2}{x}$ с интегральным решением $y = \frac{Cx^2 - 1}{Cx^2 + 1}$ не учтены (являются потерянными) решения…

1) $y \equiv -1$ 2) $y \equiv 1$ 3) $y \equiv \pm 1$ 4) $y \equiv 0$

4. Однородные уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой…

1) $y = z(x) \cdot x$ 2) $y = z(x) + x$ 3) $y = z^2(x)$ 4) $y = z(x)$

5. При решении линейного неоднородного уравнения первого порядка методом вариации постоянных частное решение ищется в виде…

($a(x)$ – любое ненулевое решение соответствующего однородного уравнения)

1) $C(x) + a(x)$ 2) $a(x) \cdot C(x)$ 3) $Cx + a(x)$ 4) $a(x) \cdot x + C$

6. В линейном однородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена равны 1 и 3. Тогда фундаментальной системой решений будут функции…

1) e^x и $3e^x$ 2) e^{3x} и $3e^{3x}$ 3) e^x и e^{3x} 4) xe^x и e^{3x}

7. В линейном однородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена совпадают и равны 2. Тогда общее решение будет иметь вид…

1) C_1e^{2x}
2) $C_1e^{2x}+C_2e^{2x}$
3) $C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$
4) $C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$

8. В линейном неоднородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена равны -2 и -3, а неоднородность $f(x)=x^2e^{-2x}$. Тогда частное решение ищется методом неопределенных коэффициентов в виде…

1) $(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}$
2) Ax^2e^{-2x}
3) $(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-2x}$
4) Ax^3e^{-2x}

9. В линейном неоднородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена равны 0 и -1, а неоднородность $f(x)=x\sin 2x$. Тогда частное решение ищется методом неопределенных коэффициентов в виде…

1) $Ax\sin 2x$
2) $(Ax+B)\cos 2x$
3) $(Ax+B)(\sin 2x+\cos 2x)$
4) $(Ax+B)\sin 2x+(Cx+D)\cos 2x$

10. В линейном неоднородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена равны $1+i$ и $1-i$, а неоднородность $f(x)=2e^x\cos x$. Тогда частное решение ищется методом неопределенных коэффициентов в виде…

1) $Ae^x\cos x+Be^x\sin x$
2) $(Ax+B)e^x\cos x$
3) $Axe^x\cos x+Bxe^x\sin x$
4) $(Ax+B)e^x\sin x$

ВОПРОСЫ УСТНОЙ ЧАСТИ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

1. Задача Коши для дифференциальных уравнений и системы дифференциальных уравнений. Сведение уравнений n-го порядка к системе. Векторная форма записи.
2. Теорема существования единственности решения задачи Коши.
3. Теорема о продолжаемости решения.
4. Теорема существования единственности решения для линейных систем.
5. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского. Свойства определителя Вронского.
6. Свойства решений линейной однородной системы. Фундаментальная система решений.
7. Общее решение линейной однородной системы.
8. Линейная неоднородная система. Общее решение линейной неоднородной системы. Метод вариации постоянных.
9. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами с различными корнями характеристического многочлена.
10. Общее решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами с кратными корнями характеристического многочлена.
11. Общее решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами с комплексными корнями характеристического многочлена.
12. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностью в виде квазимногочлена. Частное решение.
13. Метод неопределенных коэффициентов.
14. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
15. Линейная неоднородная система с постоянными коэффициентами. Частные решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами с неоднородностью в виде квазимногочлена.
16. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
17. Устойчивый и неустойчивый узлы.
18. Седло.
19. Фокус.
20. Центр.
21. Вырожденный случай фазовых портретов.
22. Теорема о непрерывности решения по начальным условиям и параметрам.
23. Теорема о дифференцируемости решения по начальным условиям и параметрам.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник / И. Г. Петровский. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 208 с. – (Классика и современность. Математика). – ISBN 978-5-9221-1144-7 // Библиотека РФФИ: [сайт]. – URL: https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_17811

Дополнительная

Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 400 с. – (Классика и современность. Математика). – ISBN 978-5-9221-1090-7.

Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. для ун-тов / Л. С. Понтрягин. – Изд. 3-е, стер. – Москва: Наука, 1970. – 331 с.

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие для студентов вузов: допущено М-вом высшего и среднего спец. образования СССР / А. Ф. Филиппов. – Изд. 5-е, испр. – Москва: Наука, 1979. – 128 с.