

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Костромской государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ

и. о. проректора по образовательной деятельности

И. Ю. Герасимчук



## **ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО НАУЧНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

**Наименование 1.1.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

Составитель:

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики

К. Е. Ширяев

Кострома

2023

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа вступительного испытания сформирована на основе Федеральных государственных требований (ФГТ) к программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), утвержденных приказом Минобрнауки России от 20.10.2021 № 951.

Вступительное испытание проводится в соответствии с Правилами приема в КГУ, Регламентом проведения вступительных испытаний и Программой вступительного испытания.

Программа содержит перечень тем для подготовки к вступительным испытаниям, описание формы вступительного испытания, критерии оценки, образцы заданий вступительного испытания, список рекомендуемой литературы для подготовки.

Целью проведения вступительного испытания является выявление фундаментальных знаний по обыкновенным дифференциальным уравнениям, навыков профессионального мышления и способности к самостоятельному решению практических задач.

Вступительный экзамен проводится в дистанционной форме.

**Продолжительность вступительного испытания (дистанционно)** – 90 минут.

**Форма проведения вступительного испытания (дистанционно)** – компьютерное тестирования и устная часть в форме собеседования.

При проведении вступительных испытаний с использованием дистанционных технологий идентификация личности абитуриента осуществляется посредством анализа учетных данных пользователя (логина и пароля) и предъявления паспорта (иного документа, удостоверяющего личность) в развернутом виде (разворот с фотографией на уровне глаз). Процедура идентификации личности абитуриента сопровождается видеофиксацией с помощью онлайн-сервисов.

### **Критерии оценки и шкала оценивания при дистанционной форме проведения вступительного испытания**

Компьютерное тестирование проходит в системе дистанционного обучения КАГУ и сопровождается видеофиксацией с помощью сервиса Zoom (SberJazz / Jazz by Sber или др.) и наблюдением с целью фиксации списывания, использования дополнительных средств связи, источников и т.д. В случае большого количества участники испытаний делятся на группы по 20–25 человек, над каждой из которых 1–2 человека в течение испытания осуществляют наблюдение за каждым из

участников и в случае подозрения на списывание и т. д. пишут ему в чате об этом. В случае небольшого количества (менее 10 человек) наблюдение осуществляется членами комиссии. Каждое испытание записывается на видео, которое впоследствии используется в случае апелляций и т. д. Контроль за сдачей испытаний осуществляется из компьютерной аудитории КГУ. Время проведения компьютерного тестирования 45 минут.

Устный опрос участников испытаний проходит с помощью сервиса Zoom (SberJazz / Jazz by Sber или др.) в форме собеседования. При этом членами комиссии задаются два устных вопроса из прилагаемого списка, на которые участник дает устные ответы без предварительной письменной подготовки суммарно в течение 45 минут.

В программу испытания входят темы, посвященные теореме существования и единственности задачи Коши, теория линейных систем, теория уравнений с постоянными коэффициентами, а также теоремы непрерывности и дифференцируемости по параметру.

Результаты вступительных испытаний в аспирантуру оцениваются по **100-балльной шкале**.

Минимальное количество баллов для участия в конкурсе – **50 баллов**.

При проведении вступительного испытания по специальной дисциплине, соответствующей направленности подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре баллы начисляются следующим образом:

- до 50 баллов – за тестовую часть вступительного испытания;
- до 50 баллов – за устный ответ;

Тестовая часть вступительного испытания содержит 10 заданий. За правильное выполнение каждого задания начисляется 5 баллов. В случае получения за письменную часть более 20 баллов абитуриент допускается к устной части вступительного испытания.

Каждому участнику устной части вступительного испытания задается два теоретических вопроса на выбор комиссии. Могут быть предложены базовые определения, формулировки основных теорем, несложные доказательства или задачи, иллюстрирующие теоретические факты, связанные с тестовыми заданиями. За ответ на вопрос абитуриент может получить не более 25 баллов.

Требования, предъявляемые к устному ответу, включают в себя два критерия – полноту ответа и правильность формулировки. Определения должны быть исчерпывающими и полными, формулировки теорем должны не содержать неизвестных поступающему понятий из курсов математического анализа, теории функций, линейной алгебры и геометрии в объеме вузовского курса.

## СОДЕРЖАНИЕ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

1. Задача Коши для дифференциальных уравнений и системы дифференциальных уравнений.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
3. Теорема о продолжаемости решения.
4. Теорема существования единственности решения для линейных систем.
5. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского. Свойства определителя Вронского.
6. Свойства решений линейной однородной системы. Фундаментальная система решений.
7. Общее решение линейной однородной системы.
8. Линейная неоднородная система. Общее решение линейной неоднородной системы. Метод вариации постоянных.
9. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами с различными корнями характеристического многочлена.
10. Общее решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами с кратными корнями характеристического многочлена.
11. Общее решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами с комплексными корнями характеристического многочлена.
12. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностью в виде квазимногочлена. Частное решение.
13. Метод неопределенных коэффициентов.
14. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
15. Линейная неоднородная система с постоянными коэффициентами. Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами с неоднородностью в виде квазимногочлена.
16. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
17. Теорема о непрерывности решения по начальным условиям и параметрам.
18. Теорема о дифференцируемости решения по начальным условиям и параметрам.

**Демонстрационные варианты заданий при дистанционной форме проведения  
вступительного испытания**

**Варианты тестовых заданий**

1. Первым интегралом уравнения  $y' = xy$  является...

1)  $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$ ,  $C$  – любое

2)  $|y| = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ ,  $C > 0$

3)  $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ ,  $C$  – любое

4)  $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$ ,  $C > 0$

2. Общим решением уравнения  $y' = \frac{y-1}{x}$  является...

1)  $y = 1 + Cx$ ,  $C$  – любое

2)  $\ln|y-1| = \ln|x| + C$ ,  $C$  – любое

3)  $y = 1 + Cx$ ,  $C > 0$

4)  $\ln|y-1| = \ln|x| + C$ ,  $C > 0$

3. В уравнении  $y' = \frac{1-y^2}{x}$  с интегральным решением  $y = \frac{Cx^2-1}{Cx^2+1}$  не учтены (являются потерянными) решения...

1)  $y \equiv -1$

2)  $y \equiv 1$

3)  $y \equiv \pm 1$

4)  $y \equiv 0$

4. Однородные уравнения  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой...

1)  $y = z(x) \cdot x$

2)  $y = z(x) + x$

3)  $y = z^2(x)$

4)  $y = z(x)$

5. При решении линейного неоднородного уравнения первого порядка методом вариации постоянных частное решение ищется в виде...

( $a(x)$  – любое ненулевое решение соответствующего однородного уравнения)

1)  $C(x) + a(x)$

2)  $a(x) \cdot C(x)$

3)  $Cx + a(x)$

4)  $a(x) \cdot x + C$

6. В линейном однородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена равны 1 и 3. Тогда фундаментальной системой решений будут функции...

- 1)  $e^x$  и  $3e^x$       2)  $e^{3x}$  и  $3e^{3x}$       3)  $e^x$  и  $e^{3x}$       4)  $xe^x$  и  $e^{3x}$

7. В линейном однородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена совпадают и равны 2. Тогда общее решение будет иметь вид...

- 1)  $C_1e^{2x}$       2)  $C_1e^{2x} + C_2e^{2x}$   
3)  $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$       4)  $C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$

8. В линейном неоднородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена равны  $-2$  и  $-3$ , а неоднородность  $f(x) = x^2e^{-2x}$ . Тогда частное решение ищется методом неопределенных коэффициентов в виде...

- 1)  $(Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$       2)  $Ax^2e^{-2x}$   
3)  $(Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{-2x}$       4)  $Ax^3e^{-2x}$

9. В линейном неоднородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена равны 0 и  $-1$ , а неоднородность  $f(x) = x\sin 2x$ . Тогда частное решение ищется методом неопределенных коэффициентов в виде...

- 1)  $Ax \sin 2x$       2)  $(Ax + B)\cos 2x$   
3)  $(Ax + B)(\sin 2x + \cos 2x)$       4)  $(Ax + B)\sin 2x + (Cx + D)\cos 2x$

10. В линейном неоднородном уравнении второго порядка с постоянными коэффициентами корни характеристического многочлена равны  $1+i$  и  $1-i$ , а неоднородность  $f(x) = 2e^x \cos x$ . Тогда частное решение ищется методом неопределенных коэффициентов в виде...

- 1)  $Ae^x \cos x + Be^x \sin x$       2)  $(Ax + B)e^x \cos x$   
3)  $Axe^x \cos x + Bxe^x \sin x$       4)  $(Ax + B)e^x \sin x$

## РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ИСПЫТАНИЮ

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / И. Г. Петровский. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 206 с. – ISBN 978-5-9221-1144-7 // Портал РФФИ : электронная библиотека. – URL: [https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o\\_17815#1](https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_17815#1).

2. Асташова И. В. Практикум по курсу «Дифференциальные уравнения» : учебное пособие / И. В. Асташова, В. А. Никишкин. – Москва : Евразийский открытый институт, 2011. – 96 с. – ISBN 978-5-374-00488-5 // Университетская библиотека онлайн : электронная библиотечная система. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90289>