

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Костромской государственный университет»  
(КГУ)

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**АЛГЕБРА**

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование  
(с двумя профилями подготовки)

Направленности: Математика, физика

Квалификация выпускника: бакалавр

**Кострома**  
**2020**

Рабочая программа дисциплины «Алгебра» разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (уровень бакалавриата), утвержденным приказом Министерства образования и науки РФ от 22.02.2018 № 125 (зарегистрировано в Минюсте России 15.03.2018 № 50358); в соответствии с учебным планом направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (направленности Математика, физика), год начала подготовки 2020.

Разработал:

  
\_\_\_\_\_   
подпись

Чебунькина Т.А., доцент, к. тех. н., доцент

Рецензент:

  
\_\_\_\_\_   
подпись

Землякова И. В., зав. каф. высш. мат., д. тех. н., проф.

УТВЕРЖДЕНО:

Заведующий кафедрой высшей математики

  
\_\_\_\_\_   
подпись

Землякова И. В., д. тех. н., проф.

ПРОГРАММА ПЕРЕУТВЕРЖДЕНА:

На заседании кафедры высшей математики

Протокол заседания кафедры № 5 от 28 января 2021 г.

Заведующий кафедрой высшей математики

  
\_\_\_\_\_   
подпись

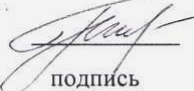
Матыцина Т. Н., к. ф.-м. н., доцент

ПРОГРАММА ПЕРЕУТВЕРЖДЕНА:

На заседании кафедры высшей математики

Протокол заседания кафедры № 8 от 18 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой высшей математики

  
\_\_\_\_\_   
подпись


Матыцина Т. Н., к. ф.-м. н., доцент

ПРОГРАММА ПЕРЕУТВЕРЖДЕНА:

На заседании кафедры высшей математики

Протокол заседания кафедры № 6 от 09.03.2022 г.

Заведующий кафедрой высшей математики

 Матыцина Т. Н., к. ф.-м. н., доцент


подпись

ПРОГРАММА ПЕРЕУТВЕРЖДЕНА:

На заседании кафедры высшей математики

Протокол заседания кафедры № 8 от 05.05.2023 г.

Заведующий кафедрой высшей математики

 Матыцина Т. Н., к. ф.-м. н., доцент

подпись

## 1. Цели и задачи освоения дисциплины

Цель дисциплины:

Формирование у студентов понимания основных видов алгебр и воспитания у них общей алгебраической культуры, необходимой как для глубокого понимания школьного курса математики, так и для освоения смежных математических дисциплин. Формирование представления об основах математической логики и дискретной математики.

Задачи дисциплины:

- изучить основные понятия линейной алгебры;
- научить студентов действиям с комплексными числами;
- изучить кольца многочленов от одной и нескольких переменных над полем, кольца многочленов над числовыми полями, основную теорему алгебры;
- познакомить студентов с основными алгебрами и алгебраическими системами;
- познакомить студентов с формализацией математического языка («Алгебра высказываний», «Логика предикатов»);
- научить доказывать равносильность формул алгебры высказываний и логики предикатов;
- научить решать логические задачи;
- познакомить студентов с основами аксиоматических теорий;
- изучить аксиоматические теории «Исчисление высказываний»; «Исчисление предикатов»;
- сформировать представления о значении и областях применения дискретной математики;
- получить знания о методе математической индукции, об основных комбинаторных конфигурациях, о рекуррентных соотношениях и методах их решений, об основных понятиях и методах теории графов;
- научить доказывать утверждения с помощью метода математической индукции;
- научить решать комбинаторные задачи и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами;
- получить навыки по применению аппарата теории графов для решения оптимизационных задач;
- научить решать задачи о максимальном потоке и минимальном разрезе и о потоке минимальной стоимости в сетях.

Кроме того, одной из задач изучения данного курса является научно-образовательное, профессионально-трудовое воспитание обучающихся посредством содержания дисциплины и актуальных воспитательных технологий.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины обучающийся должен освоить компетенции:

ОПК-8 - способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний

Код и содержание индикаторов компетенции:

ИОПК-8.1. Демонстрирует владение системой специальных научных знаний в предметной области

ИОПК-8.2. Применяет специальные предметные знания в педагогической деятельности по направленности программы.

Знать:

основные понятия теории множеств; основные понятия теории матриц, понятие определителя, свойства определителей, теорему Лапласа, понятия евклидова и векторного пространств, свойства линейных операторов, свойства собственных векторов, понятие комплексного числа, различные формы его записи, различные способы решения систем линейных уравнений; основные понятия теории многочленов от одной переменной над полем (корень многочлена, наибольший общий делитель многочленов, приводимость и неприводимость многочленов над полем); основные понятия теории многочленов от нескольких переменных, симметрические многочлены; свойства колец многочленов над числовыми полями; соответствия, отношения, отображения, операции; основные понятия, связанные с группами, кольцами, полями; основные понятия математической логики, способы доказательства равносильности формул

алгебры высказываний и логики предикатов; способы доказательства выводимости формул исчисления высказываний и исчисления предикатов; основные теоремы изученных разделов математической логики; основные понятия и методы дискретной математики

Уметь:

выполнять операции над множествами; успешно выполнять действия над матрицами, вычислять определители, решать системы линейных уравнений методом Гаусса, методом Крамера, методом обратной матрицы, находить фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений, выполнять действия с векторами, находить базис и ранг системы векторов, приводить матрицу линейного оператора к диагональному виду, приводить квадратичную форму к каноническому виду; выполнять действия над многочленами, находить их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, применять схему Горнера; находить целые и рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами; решать уравнения третьей и четвертой степеней; определять свойства отношений и отображений; определять вид алгебры; строить фактор-группы и фактор-кольца, доказывать равносильность формул, использовать технику логических преобразований; формально доказывать формулы исчисления высказываний и предикатов; доказывать основные теоремы математической логики; решать логические задачи; пользоваться основными методами дискретной математики для решения практических задач с целью подготовки студентов к преподаванию предметов в среднем образовательном учреждении, базирующихся на методах дискретной математики, а также в той или иной мере использующих их.

Владеть:

навыками решения задач по всем разделам курса; техникой логических преобразований; навыками формализации и решения практических задач методами дискретной математики в рамках формируемых компетенций

### 3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Дисциплина относится к обязательной части учебного плана. Изучается в 1,2,3,4,5 семестрах обучения.

Изучение дисциплины основывается на ранее освоенных дисциплинах/практиках:

курс элементарной математики, изучаемый в среднем общеобразовательном учреждении.

Изучение дисциплины является основой для освоения последующих дисциплин/практик:

Организация исследовательской деятельности в системе образования, Математический анализ, Геометрия, Механика, Молекулярная физика, Электричество и магнетизм, Оптика, Атомная и ядерная физика, Теория вероятностей и математическая статистика, Астрономия, Дифференциальные уравнения, учебная практика (ознакомительная), производственная практика (педагогическая, образовательно-воспитательная), производственная практика (педагогическая по физике), производственная практика (педагогическая по математике), Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

### 4. Объем дисциплины

#### 4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием академических часов и виды учебной работы

Виды учебной работы,	Очная форма
Общая трудоемкость в зачетных единицах	18
Общая трудоемкость в часах	648
Аудиторные занятия в часах, в том числе:	196
Лекции	112
Практические занятия	84
Лабораторные занятия	—
Самостоятельная работа в часах	308 + 144

Форма промежуточной аттестации	экзамен в 1, 2, 3, 5 семестрах зачет с оценкой в 4 семестре курсовая работа в 5 семестре
--------------------------------	--

#### 4.2. Объем контактной работы на 1 обучающегося

Виды учебных занятий	Очная форма
Лекции	112
Практические занятия	84
Лабораторные занятия	–
Консультации	8
Зачет/зачеты	–
Экзамен/экзамены	1,4
Курсовые работы	3
Курсовые проекты	–
Всего	208,4

### 5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам), с указанием количества часов и видов занятий

#### 5.1 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела, темы	Всего з.е/час	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа
			Лекц.	Практ.	Лаб.	
1	Множества	10	6	1	-	3
2	Матрицы и действия над ними	5	2	1	-	2
3	Определители $n$ -го порядка	6	2	1	-	3
4	Ранг матрицы. Обратная матрица	9	3	2	-	4
5	Системы линейных алгебраических уравнений	13	6	2	-	5
6	Понятие вещественного линейного пространства	9	4	1	-	4
7	Комплексные числа и операции над ними	7	4	1	-	2
8	Линейное (векторное) пространство над произвольным полем	9	4	2	-	3
9	Линейные операторы и действия над ними	8	4	1	-	3
10	Собственные векторы и собственные значения линейного оператора	9	5	1	-	3
11	Евклидовы и унитарные векторные пространства	9	4	1	-	4
12	Линейные операторы в евклидовом (унитарном) векторном пространстве	6	2	1	-	3
13	Квадратичные формы	8	4	1	-	3
Экзамен		36	-	-	-	36
Всего за 1 семестр:		4/144	50	16	-	42+36

14	Многочлены от одной переменной	24	3	3	-	18
15	Многочлены от нескольких переменных	28	5	5	-	18
16	Многочлены над полем комплексных чисел	26	4	4	-	18
17	Многочлены над полем действительных чисел, рациональных чисел	30	4	4	-	22
Экзамен		36	-	-	-	36
Всего за 2 семестр:		4/144	16	16	-	76+36
18	Алгебра высказываний	30	6	6	-	18
19	Исчисление высказываний	28	4	6	-	18
20	Логика предикатов	28	4	6	-	18
21	Исчисление предикатов	22	4	2	-	16
Экзамен		36	-	-	-	36
Всего за 3 семестр:		4/144	18	20	-	70+36
22	Алгебраические структуры	30	6	4	-	20
23	Фактор-группы. Фактор-кольца	24	2	2	-	20
Зачет с оценкой		18	-	2	-	16
Всего за 4 семестр:		2/72	8	8	-	56
24	Метод математической индукции	17	2	2	-	2
25	Основные комбинаторные конфигурации	23	3	6	-	6
26	Рекуррентные соотношения	23	3	6	-	6
27	Теория графов	31	8	6	-	6
28	Потоки в сетях	20	4	4	-	8
Курсовая работа		36	-	-	-	36
Экзамен		36	-	-	-	36
Всего за 5 семестр:		4/144	20	24	-	64+36
Итого:		18/648	112	84	-	308+144

## 5.2. Содержание:

**Тема 1. Множества.** Равенство множеств, включение множеств. Операции над множествами и их свойства. Разбиение на классы. Прямое произведение множеств. Правило суммы и правило произведения.

**Тема 2. Матрицы и операции над ними.** Основные понятия. Сложение матриц и умножение матрицы на число. Умножение матриц, условие существования произведения матриц. Квадратная матрица. Единичная матрица. Матрица, обратная данной.

**Тема 3. Определители  $n$ -го порядка.** Определители второго и третьего порядков. Определитель  $n$ -го порядка. Свойства определителей. Теорема Лапласа и ее следствия. Вычисление определителей.

**Тема 4. Ранг матрицы. Обратная матрица.** Элементарные преобразования матриц и приведение их к ступенчатой форме. Ранг матрицы и его нахождение. Теорема о базисном миноре. Нахождение обратной матрицы.

**Тема 5. Системы линейных алгебраических уравнений.** Решение систем линейных алгебраических уравнений. Случай однозначной разрешимости системы линейных уравнений. Исследование систем линейных алгебраических уравнений. Фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений.

**Тема 6. Понятие вещественного линейного пространства.** Основные понятия. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг и базис системы векторов.

**Тема 7. Комплексные числа и операции над ними.** Понятие поля и кольца. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формула Муавра.

**Тема 8. Линейное (векторное) пространство над произвольным полем.** Основные понятия. Подпространства, их сумма и пересечение. Линейное многообразие. Базис пространства. Координаты вектора. Координаты вектора в различных базисах.

**Тема 9. Линейные операторы и действия над ними.** Основные понятия. Матрица линейного оператора. Матрица линейного оператора в различных базисах. Действия над линейными операторами. Обратимые линейные операторы. Ранг и дефект линейного оператора.

**Тема 10. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.** Собственные векторы линейного оператора; их свойства и нахождение. Инвариантные подпространства. Корневые подпространства и жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора.

**Тема 11. Евклидовы и унитарные векторные пространства.** Метрические понятия. Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис. Ортогональное дополнение.

**Тема 12. Линейные операторы в евклидовом (унитарном) векторном пространстве.** Основные понятия. Сопряженные операторы. Нормальные, унитарные и самосопряженные операторы.

**Тема 13. Квадратичные формы.** Квадратичные и билинейные формы. Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

**Тема 14. Многочлен от одной переменной.** Делимость многочленов. Деление с остатком. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера. Кратные корни. Приводимые и неприводимые над полем многочлены. НОД и НОК многочленов.

**Тема 15. Многочлены от нескольких переменных.** Однородные многочлены. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Формулы Виета.

**Тема 16. Многочлены над полем комплексных чисел.** Основная теорема алгебры. Приводимость многочленов над полем комплексных чисел. Решение уравнений третьей и четвертой степеней.

**Тема 17. Многочлены над полем действительных чисел, полем рациональных чисел.** Теоремы о корнях многочленов в множестве действительных чисел, множестве рациональных чисел. Приводимость многочленов над полем  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{Q}$ . Расширение полей.

**Тема 18. Алгебра высказываний.** Введение. Дедуктивный характер математики. Предмет математической логики, ее роль в вопросах обоснования математики. Тенденции в развитии современной математической логики. Логика высказываний. Логические операции над высказываниями. Язык логики высказываний, формулы. Истинностные значения формул. Равносильность. Равносильные преобразования формул. Представление истинностных функций формулами. Тавтологии – законы логики.

**Тема 19. Исчисление высказываний.** Принципы построения исчислений высказываний (гильбертовского или генценовского типа). Классическое и конструктивное (интуиционистское) исчисления. Аксиомы, правила вывода. Доказуемость формул. Выводимость из гипотез. Производные правила. Теорема дедукции. Характеристики исчислений высказываний – непротиворечивость, полнота, разрешимость и связанные с ними теоремы. Независимость аксиом, правил вывода. Законы исключенного третьего и снятия двойного отрицания – законы классической логики. Эффективные и неэффективные доказательства.

**Тема 20. Логика предикатов.** Предикаты и кванторы. Язык логики предикатов. Термы и формулы. Языки первого порядка. Интерпретации. Значение формулы в интерпретации. Равносильность. Общезначимость и выполнимость формул. Проблема общезначимости, неразрешимость ее в общем случае. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, построение отрицаний предложений.



**Тема 21. Исчисление предикатов.** Формализованные математические теории. Теории первого порядка. Аксиомы теории, правила вывода. Доказательства в теории. Характеристики теорий: непротиворечивость, полнота, разрешимость. Непротиворечивость исчисления предикатов. Модели теорий. Теорема о полноте для теорий.

**Тема 22. Алгебраические структуры.** Алгебраические операции. Свойства бинарных алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, сократимость, нейтральный элемент, симметричный элемент. Подмножества, замкнутые относительно бинарной алгебраической операции. Алгебры с одной бинарной операцией (группоид, полугруппа, моноид, группа). Алгебры с двумя бинарными операциями (кольцо, область целостности, поле). Конечные и бесконечные множества. Конечные поля. Булевы алгебры. Гомоморфизм алгебр. Алгебраические системы. Решетки.

**Тема 23. Фактор-группы. Фактор-кольца.** Подгруппы. Нормальные делители. Фактор-группа. Теоремы о гомоморфизмах групп. Подкольца. Идеалы кольца. Фактор-кольца. Теоремы о гомоморфизмах колец. Кольца главных идеалов, евклидовы и факториальные кольца.

**Тема 24. Метод математической индукции.** Принцип метода математической индукции. Алгоритм метода математической индукции. Применение метода математической индукции для доказательства утверждений, зависящих от натурального параметра  $n$ .

**Тема 25. Основные комбинаторные конфигурации.** Правила суммы и произведения. Метод включений и исключений. Размещения без повторений и с повторениями. Их число. Перестановки без повторений и с повторениями. Их число. Сочетания с повторениями и без повторений. Их число. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Полиномиальная теорема.

**Тема 26. Рекуррентные соотношения.** Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Способы решения рекуррентных соотношений. Суммы и рекуррентности. Преобразования сумм. Кратные суммы. Некоторые методы суммирования.

**Тема 27. Теория графов.** Основные понятия теории графов. Определение и разновидности графов. Способы задания графов. Изоморфизм графов. Подграф и часть графа. Клика. Звезда вершины графа. Операции над графами. Маршруты, цепи, циклы. Связность. Нахождение сильных компонент орграфа. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер. Метрические характеристики графа. Понятие сети. Матрица весов. Нахождение кратчайших путей в ориентированной сети с помощью алгоритма Дейкстры Беллмана-Мура. Деревья и их свойства, лес. Задача об остове экстремального веса. Алгоритм Прима. Эйлеровы циклы и цепи. Эйлеровы графы. Необходимые и достаточные условия существования эйлерова цикла в графе. Алгоритм Флери. Гамильтоновы графы и циклы. Необходимые и достаточные условия существования гамильтонова цикла в графе. Задача коммивояжера. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ. Планарные графы. Укладка графа. Теорема Эйлера, теорема Понтрягина-Куратовского. Понятия искаженности и толщины непланарных графов. Алгоритм укладки графа на плоскости. Раскраски графов. Хроматические графы. Алгоритм последовательной раскраски графа.

**Тема 28. Потоки в сетях.** Основные понятия. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм Форда-Фалкерсона построения максимального потока и минимального разреза. Поток минимальной стоимости. Математическая модель задачи о потоке минимальной стоимости и ее общее решение.

## **6. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

Литература для проведения практических занятий и самостоятельной работы обучающихся:

[1] Матыцина, Т.Н. Линейная алгебра : учебно-методическое пособие / Т.Н. Матыцина, Е.К. Коржевина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Костромской государственный университет имени Н. А. Некрасова. - Кострома : КГУ им. Н. А. Некрасова, 2014, 2015. - 151 с. : ил., табл., схем. - ISBN 978-5-7591-1432-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275642>

- [2] Матыцина, Татьяна Николаевна. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / Т. Н. Матыцина, Е. К. Коржевина ; М-во образования и науки Российской Федерации, Костромской гос. ун-т им. Н. А. Некрасова. - Электрон. текст. дан. - Кострома : КГУ, 2014. - 151 с. - Загл. с экрана. - ISBN 978-5-7591-1432-1 : Б. ц.
- [3] Матыцина, Татьяна Николаевна. Линейная алгебра : практикум / Т. Н. Матыцина, Е. К. Коржевина ; М-во образования и науки РФ, Костром. гос. ун-т им. Н. А. Некрасова. - Кострома : КГУ, 2016. - 68, [2] с. - Имеется электрон. ресурс. - Библиогр.: с. 68-69. - ISBN 978-5-7591-1525-0 : 31.60.
- [4] Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. - Изд. 3-е. - Москва : Наука, 1966. - 381 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464077> (22.02.2018).
- [5] Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре [Электронный ресурс] : учеб. / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/399> — Загл. с экрана.
- [6] Варпаховский, Ф. Л. Алгебра : Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения : учеб. пособие для студ.-заоч. 1 курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. - М. : Просвещение, 1978. - 144 с. - 0.30.
- [7] Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. - 5-е изд., исправл. - Москва : Физматлит, 2002. - 258 с. - ISBN 5-9221-0026-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75576> (20.02.2018).
- [8] Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон ; пер. с англ. Ф.А. Кабакова ; под ред. С.И. Адян. - Москва : Наука, 1971. - 320 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458257> (20.02.2018).
- [9] Гиндикин, С.Г. Алгебра логики в задачах / С.Г. Гиндикин ; под ред. Ю.А. Гастева, В.В. Донченко. - Москва : Наука, 1972. - 288 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=449478> (20.02.2018).
- [10] Сидоров, А. В. Математическая логика: алгебра логики : учеб.-метод. пособие. Ч. 1. - Кострома : КГУ, 2006. - 32 с. - 15.00. Электронные ресурсы: Book100158
- [11] Чередникова, А. В. Дискретная математика: теория и практика: учеб. пособие для вузов / А.В. Чередникова, О.Б. Садовская, Л.А. Каминская. – Кострома: КГТУ, 2012; 2011. –75 с.: рис. – обязат. – ISBN 978-5-8285-0585-2: 6.93.
- [12] Шапорев, С.Д. Дискретная математика: курс лекций и практических занятий: учеб. пособие для студ. вузов: допущено. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с. – Предм. указ.: с. 393-396. – ISBN 978-5-94157-703-3: 227.00.
- [13] Матыцина, Т.Н. Дискретная математика. Решение рекуррентных соотношений: практикум / М-во образования и науки Российской Федерации, Костромской гос. ун-т им. Н. А. Некрасова. – Кострома: КГУ, 2010. – 33, [2] с. – Библиогр.: с. 34. – 2.70.
- [14] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 416 с. – ISBN 978-5-9221-0477-7
- [15] Лунгу, К.Н. Задачи по математике / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 336 с. – ISBN 978-5-9221-1001-3.
- [16] Сборник задач по алгебре / И.В. Аржанцев и др. Под ред. А.И. Кострикина: Учеб. Пособие для вузов. – Новое издание, справленное. – М.: МЦНМО, 2009. – 408 с. ISBN 978-5-94057-413-2
- [17] Судоплатов, С.В. Дискретная математика: учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. – Москва; Новосибирск: Инфра-М – НГТУ, 2007. – 256 с. – (Высш. образование). – МО РФ. – ЕН. – ISBN 5-16-002299-6. – ISBN 5-7782-0466-3: 104.00.  
[http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=135675&sr=1](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=135675&sr=1)
- [18] Чередникова, А.В. Введение в теорию графов: учеб.-метод. пособие / А.В. Чередникова, И.В. Землякова. – Кострома: КГТУ, 2012. – 28 с. – ЕН. – обязат. – б.ц.  
Электронная библиотека КГУ Введение в теорию графов\_227510
- [19] Дискретная математика. Часть 1: учебное пособие / И.П. Болодурина, Т.М. Отрывкина, О.С. Аранова, Т.А. Огурцова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2016. –

[20] Грэхем, Р. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник . – М.: Мир, 1998. – 703 с. – ISBN 5-03-001793-3: 100.62.

[21] Матыцина, Т.Н. Дискретная математика. Основы теории графов учебно.-методическое пособие [Текст] / Т. Н. Матыцина - Кострома : КГУ, 2013. - 111 с.

### 6.1. Самостоятельная работа обучающихся по дисциплине (модулю)

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Задание	Часы	Методические рекомендации по выполнению задания	Форма контроля
1	Множества	Работа с учебной литературой. Выполнение домашних заданий.	3	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий.
2	Матрицы и действия над ними	Изучение литературы. Решение задач	2	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий.
3	Определители n-го порядка	Изучение литературы. Решение задач.	3	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий.
4	Ранг матрицы. Обратная матрица	Изучение литературы. Решение задач	4	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий.
5	Системы линейных алгебраических уравнений	Изучение литературы. Решение задач.	5	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий.
6	Понятие вещественного линейного пространства	Изучение литературы. Выполнение домашних заданий	4	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий.
7	Комплексные числа и операции над ними	Работа с учебной литературой. Решение задач	2	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Тестирование
8	Линейное (векторное) пространство над произвольным полем	Работа с учебной литературой.	3	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос.
9	Линейные операторы и действия над ними	Изучение литературы. Выполнение домашних заданий	3	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Тестирование

10	Собственные векторы и собственные значения линейного оператора	Изучение литературы. Решение задач.	3	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий.
11	Евклидовы и унитарные векторные пространства	Работа с учебной литературой. Решение задач	4	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий
12	Линейные операторы в евклидовом (унитарном) векторном пространстве	Изучение литературы. Выполнение домашних заданий	3	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Опрос. Проверка домашних заданий
13	Квадратичные формы	Изучение литературы. Решение задач.	3	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Проверка выполнения домашнего задания
	Подготовка к сдаче экзамена	Изучение литературы. Решение типовых задач	36	Лекционный материал, [1], [2], [3]	Экзамен
14	Многочлены от одной переменной	Изучение литературы. Решение задач.	18	Лекционный материал, [5]	Опрос. Проверка домашнего задания
15	Многочлены от нескольких переменных	Работа с учебной литературой. Решение задач	18	Лекционный материал, [5]	Опрос. Проверка домашних заданий
16	Многочлены над полем комплексных чисел	Изучение литературы. Решение задач.	18	Лекционный материал, [5]	Опрос. Проверка домашних заданий
17	Многочлены над полем действительных чисел, рациональных чисел	Изучение литературы. Решение задач.	20	Лекционный материал, [5]	Опрос
	Подготовка к сдаче экзамена	Изучение литературы. Решение типовых задач	36	Лекционный материал, [5]	Экзамен
18	Алгебра высказываний	Изучение теории. Решение задач	18	Лекционный материал, [10]	Проверка домашних работ.
19	Исчисление высказываний	Изучение теории. Решение задач	18	Лекционный материал, [7] (часть 2, § 3)	Проверка домашних работ, опрос
20	Логика предикатов	Изучение теории. Решение задач	18	Лекционный материал, [7] (часть 2, § 4, 5)	Проверка домашней работы.

21	Исчисление предикатов	Изучение теории	16	Лекционный материал, [7] (часть 2, § 6)	Опрос. Экзамен
	Подготовка к сдаче экзамена	Изучение литературы. Решение типовых задач	36	Лекционный материал	Экзамен
22	Алгебраические структуры	Изучение литературы. Решение задач.	20	Лекционный материал, [1], [2], [6]	Проверка выполнения домашнего задания
23	Фактор-группы. Фактор-кольца	Работа с учебной литературой. Выполнение домашних заданий	20	Лекционный материал, [1], [2], [6] (глава 1, § 1-7)	Тестирование. Опрос
	Подготовка к сдаче зачета с оценкой	Изучение теории. Решение типовых задач	16	Лекционный материал, [7], [8], [9], [10]	Зачет с оценкой
24	Метод математической индукции	Выполнение д/з.	2	[15], [16]	Разбор домашних заданий
25	Основные комбинаторные конфигурации	Изучение теоретического материала лекций. Выполнение д/з.	6	Лекционный материал, [17], [11], [12], [13]	Опрос на практическом занятии, экзамен Разбор домашних заданий
26	Рекуррентные соотношения	Изучение теоретического материала лекций. Выполнение д/з.	6	Лекционный материал, [12], [13]	Опрос на практическом занятии, экзамен Разбор домашних заданий
27	Теория графов	Изучение теоретического материала лекций. Выполнение д/з.	6	Лекционный материал, [17], [12], [18], [19]	Опрос на практическом занятии. Разбор домашних заданий
28	Потоки в сетях	Изучение теоретического материала лекций.	8	Лекционный материал, [12], [19]	Опрос на практическом занятии
	Подготовка курсовой работы	Изучение теоретического материала	36	[1]-[21]	Защита курсовой работы
	Подготовка к экзамену.	Изучение литературы. Решение типовых задач	36	Лекционный материал, [17], [11], [12], [13], [18], [14], [15], [16], [19]	Экзамен

## 6.2. Тематика и задания для практических занятий

### 1) Множества

**Множества. Способы задания множеств. Действия над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна**

1. Какие из следующих записей являются верными?

- |                           |                           |                       |
|---------------------------|---------------------------|-----------------------|
| 1) $23 \in N$             | 6) $\frac{1}{4} \notin Q$ | 11) $e \in R$         |
| 2) $-3 \in N$             | 7) $-\frac{3}{7} \in R$   | 12) $0,233... \in Q$  |
| 3) $\frac{1}{4} \notin N$ | 8) $3\frac{1}{2} \in N$   | 13) $\sqrt{41} \in Q$ |
| 4) $\frac{3}{4} \in Q$    | 9) $0 \in Z$              | 14) $\sqrt{2} \in R$  |
| 5) $-3 \in Z$             | 10) $e \in Q$             | 15) $0,1234... \in R$ |

2. Вставить знак  $\in$  или  $\subset$  в следующих записях так, чтобы получилось истинное высказывание.

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\{1\} \dots \{1, \{1, 2\}\}$           | 4) $\emptyset \dots \{1, 2, \{1\}, \{\emptyset\}\}$ |
| 2) $\{1, 2\} \dots \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$ | 5) $\emptyset \dots \{\{\emptyset\}\}$              |
| 3) $\{1, 2\} \dots \{1, 2, \{1, 2\}\}$     | 6) $\emptyset \dots \{\emptyset\}$                  |

3. Задать следующие множества перечислением элементов.

- 1)  $A = \{x \mid x \in R \text{ и } x^2 - 3x + 2 = 0\}$
- 2)  $B = \{x \mid x - \text{четное и } 0 \leq x \leq 20\}$
- 3)  $C = \{x \mid x \in R \text{ и } x^2 + 1 = 0\}$
- 4)  $D = \{x \mid x \in Z \text{ и } x^2 - 5x - 6 \leq 0\}$

4. Перечислить все подмножества множества  $A$  (то есть найти  $P(A)$  – множество – степень множества  $A$ ).

- 1)  $A = \{a, b\}$
- 2)  $B = \{1, 2, 3\}$

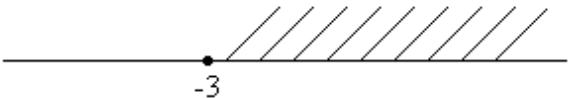
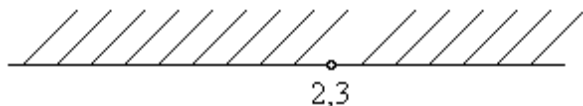
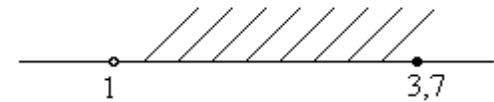
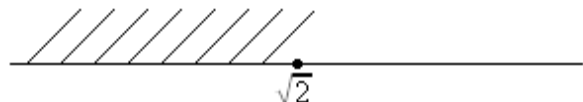

5. Установить отношения между множествами и изобразить их с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

- 1)  $A = Z$ ,  $B$  – множество четных чисел
- 2)  $A = \{x \mid x \in Z \text{ и } x = 2k, k \in Z\}$ ,  $B$  – множество четных чисел
- 3)  $A$  – множество нечетных чисел,  $B$  – множество нечетных чисел
- 4)  $A = \{x \mid x = 3k, k \in Z\}$ ,  $B = \{x \mid x = 7k, k \in Z\}$
- 5)  $A$  – множество четырехугольников  
 $B$  – множество трапеций  
 $C$  – множество прямоугольников  
 $D$  – множество квадратов  
 $E$  – множество ромбов

6. Изобразить на числовой прямой следующие множества.

- 1)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4,3 < x < 2,5\}$
- 2)  $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 4\}$
- 3)  $C = (-\infty, -3)$
- 4)  $D = \{-1, -2, 0, 1, 3\}$

7. Задать множества, изображенные на числовой прямой.

- 1) 
- 2) 
- 3) 
- 4) 
- 5) 

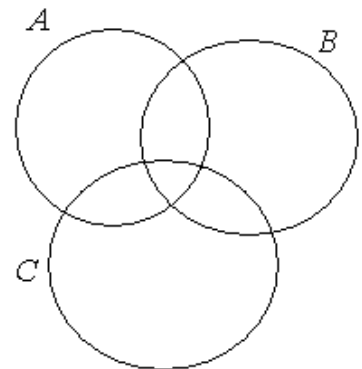
8°. Найти  $A \setminus B$ ,  $A/B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  для множеств  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{a, e, f, k\}$

9. Для множеств  $A$  и  $B$  найти и изобразить  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $A' \cup B'$ ,  $A' \cap B'$ .

- 1)  $A = [3, 7)$ ,  $B = (4, 9]$
- 2)  $A = (-1, 3)$ ,  $B = [2, \infty)$
- 3)  $A = [1, 10)$ ,  $B = (2, 5]$

10. Для множеств, изображенных на рисунке, отметить штриховкой (если это возможно) следующие множества:

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1) $A \cap B \cap C$   | 5) $(A \cup B) \cap C$ |
| 2) $A \cup B \cup C$   | 6) $(A \cap C) \cup B$ |
| 3) $(A \cap B) \cup C$ | 7) $(A \cup C) \cap B$ |
| 4) $A \cap (B \cup C)$ | 8) $(B \cup C) \cup C$ |



11. Доказать равенство множеств, используя определение.

- 1)  $A \setminus B = A \cap B'$
- 2)  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
- 3)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

## Прямое произведение множеств. Правило произведения

1. Найти  $A \times B$ ,  $B \times A$  и сравнить их.

1)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b\}$

2)  $A = \{e, f, k, l\}$ ,  $B = \{\blacksquare, \blacktriangle\}$

2. Для множества  $C = \{a, b\}$  найти  $C \times C = C^2$ ,  $C^3 = C \times C \times C$ .

3. Используя определение, доказать, что  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ .

4. Доказать, что  $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ . При каких  $A, B, C, D$  включение можно заменить равенством?

5. Для числовых множеств  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 5, 6\}$  найти  $A \times B$  и  $B \times A$ . Изобразить  $A \times B$  и  $B \times A$  на координатной плоскости. Проанализировать их взаимное расположение.

6. Изобразить  $A \times B$ , если

1)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 3 \leq x \leq 7\}$ ,  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 1 \leq x < 4\}$

2)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 3 \leq x \leq 7\}$ ,  $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } 1 \leq x \leq 4\}$

3)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } 3 \leq x \leq 7\}$ ,  $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } 1 \leq x < 4\}$

7. Изобразить  $A \times B$ , если

1)  $A = [3, 10)$ ,  $B = (-\infty, 2] \cup [3, 5)$

2)  $A = (1, 3) \cup [4, 6)$ ,  $B = (1, 3, 6, 8)$

8. Изобразить  $A^2$ , если

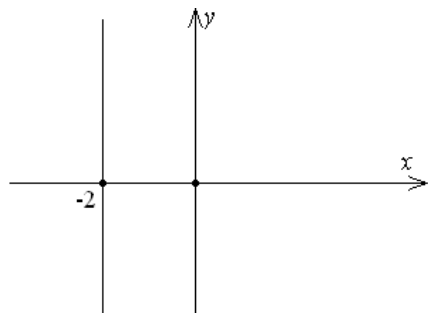
1)  $A = [0, \infty)$

2)  $A = [-1, 4)$

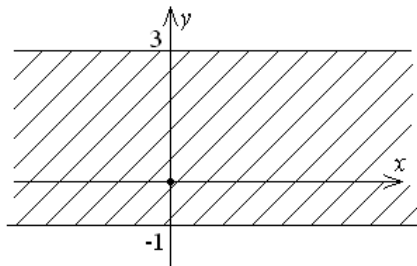
3)  $A = (-1, 2] \cup [3, 4]$

9. Найти множества  $A$  и  $B$ , если их прямое произведение изображено следующим образом:

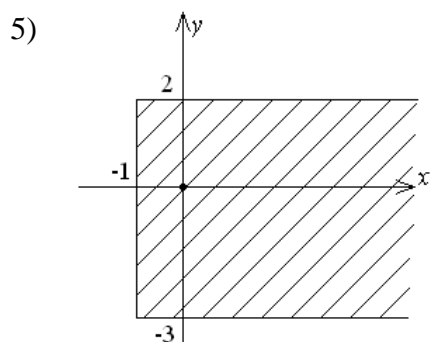
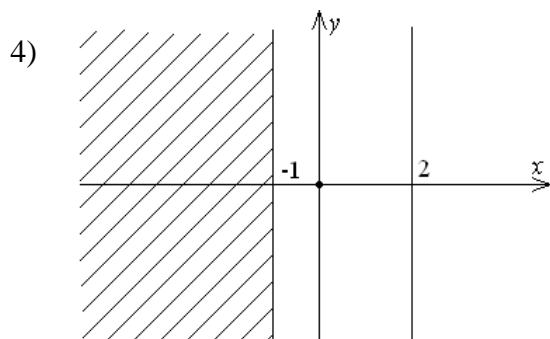
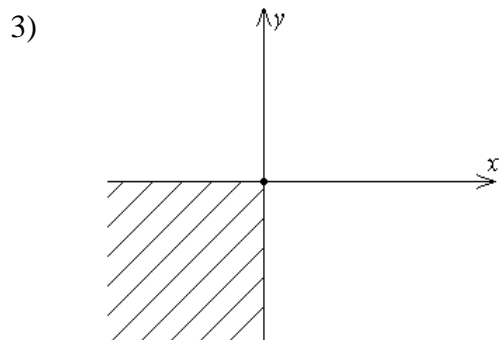
1)



2)







10. Используя правило произведения, определить, сколько

- 1) трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 при условии, что цифры в числе не могут повторяться;
- 2) четных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если цифры в числе могут повторяться;
- 3) трехзначных чисел можно составить из нечетных цифр, если цифры в числе
  - а) повторяются,
  - б) не повторяются.

11. В забеге участвовало 5 спортсменов. Сколькими способами можно предсказать распределение трех первых мест, если результаты у спортсменов всегда разные?

12. На бал пришли 30 юношей и 28 девушек. Сколькими способами можно составить пару для открытия бала?

## 2) Матрицы и действия над ними

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 788, 790, 796, 799, 802, 827.
2. Найти произведение матриц  $A$  и  $X$ , если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Записать равенство матриц  $A \cdot X$  и  $B$ , если

$$\text{а) } A \cdot X \text{ – из предыдущего задания, } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A \cdot X \text{ – из предыдущего задания, } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

4. Записать в матричной форме систему линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + x_2 = 16 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}; \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

### 3) Определители n-го порядка

#### Определители квадратных матриц. Метод Крамера

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 3, 4, 5, 22, 23, 43, 44, 74, 257, 259, 261, 266.

#### 4) Ранг матрицы. Обратная матрица

#### Ранг матрицы. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 836, 861, 840, 862, 75, 76, 838, 608, 613, 619.

#### 5) Системы линейных алгебраических уравнений

#### Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Исследование систем линейных уравнений

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 689, 693, 692, 700, 701, 713, 715, 716.

#### б) Понятие вещественного линейного пространства

## **Арифметические n-мерные векторы. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Ранг и базис системы векторов**

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 636, 637, 639, 641, 643, 665, 672, 673, 674, 675, 679.

## **7) Комплексные числа и действия над ними**

**Комплексные числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа**

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Задачи №№ 101, 105 а) б), 107 а) с), 108, 109 а), 112 с) d), 118, 119 а) g) f) j), 123 а), 124 а) б).

## **Возведение в степень; извлечение корней из комплексных чисел. Корни из 1**

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Вычислить и изобразить корни из 1 степени 3, 4, 6.
2. Задачи №№ 143 а) с) d), 137 а) d).
3. Выполнение заданий в тестовой форме по теме «Комплексные числа»

## **8) Линейное (векторное) пространство над произвольным полем**

**Векторные пространства над произвольным полем. Подпространства. Их базисы и размерность**

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 1285, 1288, 1291, 1297, 1310, 1317, 1320.

## **Базисы векторного пространства. Координаты вектора. Переход к новому базису**

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 1277, 1280.

Дополнительные задачи:

1) Проверить, образует ли подмножество  $L$  подпространство пространства  $V$ :

а)  $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4); \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1 \}, V = R^4$ ;

б)  $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}, a, b \in R \right\}, V = R^{2 \times 2}$ .

2) Найти базис и размерность подпространства  $L$ , если:

а)  $L$  – множество решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases};$$

б)  $L$  – линейная оболочка системы векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , где  $a_1 = (1, 2, 0, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1, 1, 0)$ ,  $a_3 = (1, 3, 1, 3)$ ,  $a_4 = (0, 1, 1, 2)$ .

3) Проверить, что векторы  $a, b, c$  образуют базис пространства  $V$ , и найти координаты вектора  $d$  в этом базисе, если:

а)  $a = (2, 3, 5)$ ,  $b = (3, 7, 4)$ ,  $c = (1, 2, 2)$ ,  $d = (10, 3, 3)$ ;

б)  $a = 5e_1 + 3e_2 + 4e_3$ ,  $b = 6e_1 + 3e_2 + 5e_3$ ,  $c = 4e_1 + 2e_2 + 2e_3$ ,  $d = 3e_1 + 2e_2 + e_3$ .

4) Составить матрицу перехода от базиса  $e_1, e_2$  к базису  $e'_1, e'_2$ , если:

а)  $e'_1 = 3e_1 - e_2$ ;  $e'_2 = 4e_1 + 2e_2$ ; найти  $[a]$ , если  $a = 2e_1 + e_2$ ;

б)  $e'_1 = 2e_1 + 5e_2$ ;  $e'_2 = e_1 + 3e_2$ ; найти  $[a]$ , если  $a = 3e'_1 - e'_2$ .

## 9) Линейные операторы и действия над ними

**Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Матрица линейного оператора в различных базисах. Обратимые линейные операторы. Ранг и дефект линейного оператора**

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 1441, 1443, 1448, 1449 а), 1452 а), 1453, 1457.

2. Найти ядро, образ, ранг и дефект линейного оператора, заданного матрицей  $A$ :

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 12 & -4 \end{pmatrix}$       б)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

## 10) Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

**Собственные векторы и собственные значения линейного оператора**

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 1465, 1467, 1468, 1470, 1466.

## Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 1479, 1480, 1472, 1481, 1483.

2. Раздать индивидуальные домашние задания (файл «Линейная алгебра», задание № 7).

## 11) Евклидовы и унитарные векторные пространства

**Евклидовы векторные пространства**

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 1357, 1359, 1361, 1366, 1370.

## 12) Линейные операторы в евклидовом (унитарном) векторном пространстве

## Симметрические и ортогональные матрицы. Симметрические и ортогональные преобразования. Сопряженные преобразования

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 1541, 1555, 1557, 1585.

### 13) Квадратичные формы

#### Билинейные и квадратичные формы

Литература, необходимая для занятия: [4]

1. Задачи №№ 1175, 1180, 1187, 1212, 1213, 1180.

### 14) Многочлены от одной переменной

#### Элементарные действия над многочленами (сложение, умножение, деление с остатком). Схема Горнера. Простые и кратные корни

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Задачи №№ 549 а) с) d), 550 а) b), 551 а) b) d), 552 а), 553 а), 554 а), 555 а), 557.

#### Наибольший общий делитель многочленов и его линейное представление

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Задачи №№ 577 с), 577 b), 579 d), 580 а), 684 а) с).

#### Приводимые и неприводимые над полем многочлены. Отделение неприводимых кратных множителей

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Задачи №№ 587 а) d), 593 а) с), 597 а), 585 d) e) b).

Дополнительные задачи:

1) а) Найти наибольший общий делитель многочленов  $f(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 8x + 16$  и  $h(x) = x^3 + x^2 - 7x + 20$ .

б) Пользуясь алгоритмом Евклида, найти  $u(x)$  и  $v(x)$  такие, что  $f(x) \cdot u(x) + h(x) \cdot v(x) = d(x)$ , если  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ ,  $h(x) = x^2 - x - 1$ .

2) а) С помощью схемы Горнера разложить по степеням  $(x - 2)$  многочлен  $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ . Найти  $f^{(iv)}(2)$ .

б) Определить кратность корня  $x = 3$  для многочлена  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$ .

3) Освободиться от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби

а)  $\frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$ , где  $\alpha$  – корень уравнения  $x^3 + 3x^2 - 3x + 6 = 0$ ;

б)  $\frac{1}{\sqrt[3]{25} + 4\sqrt[3]{5} + 1}$ .

4) Отделить кратные множители многочлена

а)  $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

б)  $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72$

5) Найти наибольший общий делитель многочлена  $f(x)$  и его производной  $f'(x)$

а)  $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$

б)  $f(x) = (x^2 + x + 1)^3(x-1)^4$

### 15) Многочлены от нескольких переменных

#### Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Формула Виета

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Задачи №№ 693 а) с) е), 694 а), 695 а) ф), 697 а), 699, 700, 702 а).

#### 16-17) Многочлены над полем комплексных чисел. Многочлены над полем действительных чисел, рациональных чисел

##### Многочлены над полем комплексных чисел, над полем действительных чисел

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Задачи №№ 589 а) б), 590 а) е) д), 592 а) с), 594, 617, 615.

#### Решение уравнений третьей и четвертой степени. Формулы Кардано. Способ Феррари

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Задачи №№ 167 а) д) е) I), 173 а) б).

2. Выразить корни уравнения  $x^3 + px + q = 0$  через его коэффициенты, если известно, что два корня из трех равны между собой.

3. Не решая уравнений, определить количество действительных корней

а)  $x^3 + 3x - 5 = 0$

б)  $x^3 - 5x + 1 = 0$

в)  $x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0$

#### Нахождение рациональных корней многочленов. Приводимость и неприводимость многочленов над полем рациональных чисел

Литература, необходимая для занятия: [5]

1. Задачи №№ 650 а) с) h) д) е), 653 а) б), 666 а) с).

Дополнительные задачи:

1) а) Вычислить значение многочлена  $x_1^3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^3 + x_1^3 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3^3 + x_2^3 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3^3$  от корней уравнения  $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$ .

б) Составить многочлен, корнями которого являются квадраты корней многочлена  $f(x) = x^3 + 2x - 1$ .

2) Найти рациональные корни многочлена  $f(x)$

а)  $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$

б)  $f(x) = 6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

3) Решить уравнение

а)  $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$

б)  $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$

4) а) Зная, что многочлен  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5$  имеет корень  $\alpha = -2 + i$ , найти остальные его корни.

б) Выяснить, приводим ли многочлен  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 4$  над полем рациональных чисел.

## 18) Соответствия, отношения, отображения

### Бинарные отношения и их свойства

1. Дано: множества  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $P_1 \subseteq A \times B$ ,  $P_2 \subseteq B \times B$ ,

$$P_1 = \{(b, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 4)\},$$

$$P_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 4)\}.$$

а) Изобразить  $P_1$  и  $P_2$  графически, найти  $Dom P_1$ ,  $Dom P_2$ ,  $Im P_1$ ,  $Im P_2$ .

б) Найти матрицу отношений  $P_1$  и  $P_2$ .

в) Найти матрицу  $(P_1 \circ P_1)^{-1}$ .

г) С помощью матрицы  $P_2$  определить, является ли  $P_2$  рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным отношением.

2. Перечислить все элементы бинарного отношения  $R$ , заданного на множестве  $A$ , и представить его графом.

а)  $xRy \Leftrightarrow x < y$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

б)  $xRy \Leftrightarrow y : x$ ,  $A = \{5, 6, \dots, 15\}$

3. Заданы бинарные отношения  $\rho$  на множестве действительных чисел. Для каждого из них найти  $Dom \rho$ ,  $Im \rho$ . Построить график отношения.

а)  $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow x \leq y$

б)  $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow x^2 = y$

в)  $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow x^2 = y^2$

г)  $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow y \leq \log_3 x$

4. Найти свойства отношений, заданных на множестве отрезков (множестве  $A$ ).

а)  $(x, y) \in P \Leftrightarrow x = y$

б)  $(x, y) \in T \Leftrightarrow x \text{ длиннее } y$

в)  $(x, y) \in K \Leftrightarrow x \text{ короче } y \text{ в } 2 \text{ раза}$

5. На множестве  $A$  задано отношение  $R$ . Найти его свойства. Дать, если возможно, название отношению.

а)  $A$  – множество людей.  $xRy \Leftrightarrow x$  – отец  $y$

б)  $A$  – множество людей.  $xRy \Leftrightarrow x$  выше  $y$

в)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

г)  $A$  – множество студентов одной группы.  $xRy \Leftrightarrow$  фамилия начинается с той же буквы, что и фамилия  $y$

д)  $A$  – множество окружностей на плоскости.  $xRy \Leftrightarrow x$  не пересекается с  $y$  или совпадает с  $y$

е)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$

6. Дано  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ ,  $xRy \Leftrightarrow y = x + 1$ . Перечислить все элементы бинарного отношения  $R$ , заданного на  $A$ , и представить его графом. Найти свойства этого отношения.

7. Дано множество  $A = \{1, 2, 3\}$ . На множестве  $P(A)$  задано отношение «быть подмножеством». Проверить, что это отношение частичного порядка, построить для него диаграмму Хассе.

8. На множестве  $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  задано отношение частичного порядка  $(a, b) \in \rho \Leftrightarrow b$  делится на  $a$  ( $b : a$ ). Построить диаграмму Хассе для этого отношения.

9. На множестве  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  задано отношение частичного порядка  $(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a \leq b$ . Построить для данного отношения диаграмму Хассе.

### Отношения эквивалентности

1. Дано множество  $A = \{1, 3, 31, 4, 23, 141\}$ , на нем заданы отношения

$P : xPy \Leftrightarrow$  число  $x$  имеет в записи столько же цифр, сколько и число  $y$ .

$T : xTy \Leftrightarrow$  число  $x$  заканчивается той же цифрой, что и число  $y$ .

$S : xSy \Leftrightarrow$  в записи чисел  $x$  и  $y$  есть одинаковые цифры.

Задания:

а) построить граф отношений;

б) найти свойства отношений;

в) для отношений эквивалентности построить классы; записать разбиение множества  $A$ .

2. По разбиению  $M = \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4, 6, 7\}\}$  множества  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  построить отношение эквивалентности и представить его графом.

3. Задать еще одно разбиение множества  $A$ ; повторить задание.

4. Доказать, что отношение  $R$ , заданное на множестве  $A$ , является отношением эквивалентности:

а)  $A$  – множество точек плоскости,  $xRy \equiv$  точка  $x$  находится на том же расстоянии от заданной прямой, что и точка  $y$ .

б)  $A$  – множество прямых плоскости,  $xRy \equiv$  прямые  $x$  и  $y$  параллельны или совпадают

в)  $A$  – множество многоугольников плоскости,  $xRy \equiv$  многоугольник  $x$  подобен многоугольнику  $y$ .

5. Для отношений в предыдущем задании построить классы эквивалентности, определить их количество.



6. Доказать, что отношение  $R = \{(x, y) \mid (x - y) : 3\}$ , заданное на множестве целых чисел, является отношением эквивалентности. Построить классы эквивалентности, определить их количество.

7. Доказать, что отношение  $S = \{(x, y) \mid x^2 + 2x = y^2 + 2y\}$ , заданное на множестве действительных чисел, является отношением эквивалентности. Построить примеры классов, определить количество элементов в классе.

8. На множестве  $N$  задано бинарное отношение  $\rho : \rho = \{(x, y) \mid \text{последняя цифра числа } x \text{ совпадает с последней цифрой числа } y\}$ . Доказать, что  $\rho$  – отношение эквивалентности; построить классы, определить количество чисел в классе, количество классов.

9. Можно ли разбить на классы множество прямых с помощью отношений

- а) параллельности;
- б) перпендикулярности.

10. Можно ли разбить на классы множество лучей с помощью отношений

- а) сонаправленности;
- б) противоположенности;
- в) иметь общее начало.

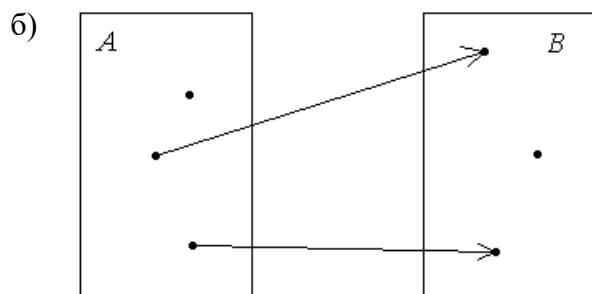
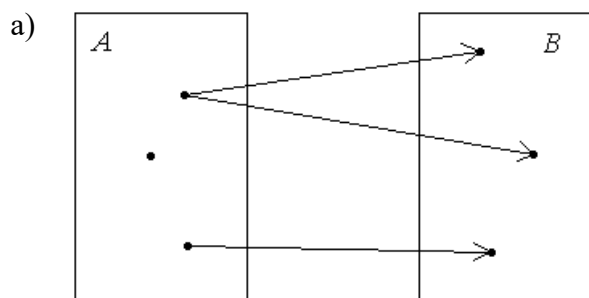
### Функции (отображения)

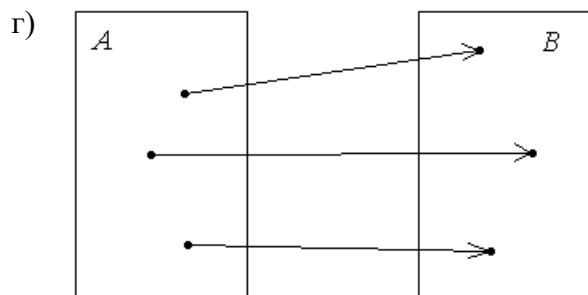
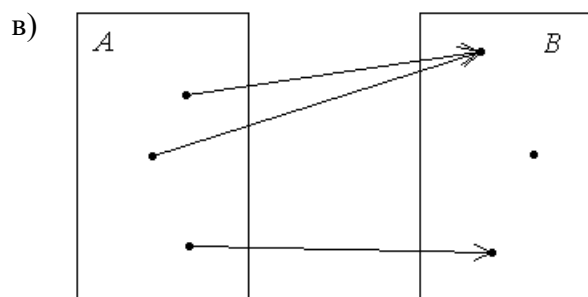
1. Какие из следующих отношений являются функциями? Указать область определения и область значений:

- а)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in N, y = x^2\}$
- б)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in N, x < y < x + 1\}$
- в)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in N, x / y\}$
- г)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in N, y = |x|\}$

2. Пусть  $A = \{0, 1\}$  – двухэлементное множество. Найдите все отображения множества  $A$  в себя и укажите, какие из них инъективны.

3. Определите, какие отношения являются функциями. Указать свойства функций.





4. Определить, какими свойствами обладает отображение  $f : A \rightarrow B$ , где  $(x, y) \in f$  в том случае, если фигура  $x$  имеет площадь  $y$ .

- а)  $A$  – множество прямоугольников,  $B = \mathbb{R}^+$
- б)  $A$  – множество прямоугольников,  $B = \mathbb{R}$
- в)  $A$  – множество квадратов,  $B = \mathbb{R}^+$
- г)  $A$  – множество квадратов,  $B = \mathbb{R}$

5. По графику отношения выяснить, является ли отношение  $S$  функцией. Определить, какими свойствами оно обладает.

- а)  $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, |x| \cdot y = 4\}$
- б)  $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, |y| = 4 - x\}$
- в)  $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = |\lg x| - \lg x\}$
- г)  $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = 4 - |x|\}$
- д)  $S = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = \frac{x}{x-1} \right\}$

6. Найти свойства функции  $f$  и определить, имеет ли она обратную функцию.

- а)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
- б)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 3x - 5$
- в)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x + 3$

7. Найти композицию отображений  $\alpha$  и  $\beta$ , если

- а)  $\alpha : x \rightarrow x^2, \beta : x \rightarrow x^3$
- б)  $\alpha : x \rightarrow \sin x, \beta : x \rightarrow x^2$
- в)  $\alpha : x \rightarrow x + 1, \beta : x \rightarrow 2^x$

8. Отображение множества  $A$  в множество  $B$  задано условием:  $f(x) = |x|$ . Найти свойства отображения, если:

а)  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$

б)  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

в)  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$

г)  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

### 19) Операции на множестве. Понятие группы, кольца, поля

#### Алгебраические операции на множестве и их свойства

1. Проверить, являются ли следующие действия бинарными алгебраическими операциями на указанных множествах:

а)  $a * b = a + b$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$

б)  $a * b = a^b$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$

в)  $a * b = \frac{a \cdot b}{2}$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$

г)  $a * b = \frac{a}{b}$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$

д)  $a * b = \frac{a + b}{2}$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$

2. Какими из свойств (коммутативность, ассоциативность, сократимость) обладают операции:

а)  $a * b = a + b$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

б)  $a * b = a - b$  на  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

в)  $a * b = \min\{a, b\}$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

г)  $a * b = a^b$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{R}_+$

3. Выяснить, существует ли нейтральный элемент относительно следующих операций. Если относительно операции есть нейтральный элемент, рассмотреть наличие симметричных элементов для произвольных элементов указанных множеств, то есть найти обратные элементы.

а)  $a * b = a + b$  на  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

б)  $a * b = \min\{a, b\}$  на  $\mathbb{N}$

в)  $a * b = \max\{a, b\}$  на  $\mathbb{N}$

г)  $a * b = \frac{a + b}{2}$  на  $\mathbb{N}$

4. На конечном множестве  $A$  задана бинарная алгебраическая операция  $*$ . Составить таблицу Кэли (таблицу умножения) для этой операции. Определить, используя таблицу, свойства этой операции:

а)  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ,  $a * b = \text{НОД}(a, b)$

б)  $A$  – множество вращений правильного треугольника,  $a * b$  – последовательное выполнение вращений

в)  $A = \Phi(\{1, 2\})$ ,  $a * b = x \cup y$

## Понятия группы, кольца, поля

1. Дайте название следующим алгебрам ( группоид, полугруппа, моноид, группа):

- а)  $\langle N, + \rangle, \langle N, \cdot \rangle, \langle N, * \rangle$ , где  $a * b = \text{НОД}(a, b)$   
б)  $\langle R, + \rangle, \langle R, \cdot \rangle, \langle R+, \cdot \rangle, \langle R \cup \{0\}, \cdot \rangle$   
в)  $\langle \{2^k, k \in Z\}, \cdot \rangle, \langle \{2^k, k \in N\}, \cdot \rangle$   
г)  $\langle \{a + b\sqrt{2}, a, b \in N\}, + \rangle, \langle \{a + b\sqrt[3]{2}, a, b \in Z\}, + \rangle$

2. Составьте таблицу умножения для элементов следующих групп:

- а) группа вращений правильного треугольника  
б) группа вращений правильного пятиугольника  
в) группа всех симметрий правильного треугольника  
г) группа симметрий прямоугольника, не являющегося квадратом

3. Определить, какие из следующих алгебр являются кольцами, полями относительно указанных операций:

- а)  $\langle Z, +, \cdot \rangle, \langle 2Z, +, \cdot \rangle, \langle nZ, +, \cdot \rangle$   
б)  $\langle R, +, \cdot \rangle, \langle R+, +, \cdot \rangle$   
в)  $\langle \{a + b\sqrt[3]{2}, a, b \in Z\}, +, \cdot \rangle$   
г)  $\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in Z \right\}, +, \cdot \rangle, \langle \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in R \right\}, +, \cdot \rangle$

4. Составить таблицу Кэли для операций сложения и умножения на множествах:

- а)  $Z_4$     б)  $Z_5$     в)  $Z_8$

Определить тип получившихся алгебр.

5. Составить таблицу Кэли для операции умножения на множествах:

- а)  $Z_5$     б)  $Z_6$     в)  $Z_8$

6. Определить, кольцами или полями являются следующие алгебры:

- а)  $\langle Z_4, +, \cdot \rangle$     б)  $\langle Z_5, +, \cdot \rangle$     в)  $\langle Z_8, +, \cdot \rangle$

## 20) Фактор-группы. Фактор-кольца

### Подгруппа, нормальный делитель. Смежные классы. Фактор-группа

1. Рассмотрим группу квадратных матриц с целыми элементами относительно операций сложения матриц  $\langle M(2, Z), + \rangle$ . Образуют ли следующие подмножества множества  $M(2, Z)$  подгруппы указанной группы?

- а)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in Z \right\}$   
б)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in Z \right\}$

$$в) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$г) \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. В группе  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  укажите подмножества, являющиеся подгруппами указанной группы.

$$а) 2\mathbb{Z} = \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$б) 3\mathbb{Z} + 2 = \{3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$в) \mathbb{N} \cup \{0\}$$

3. В группе  $Z_9 = \langle \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{8}\}, + \rangle$  классов вычетов по модулю 9 указать подмножества, образующие подгруппу.

$$а) A_1 = \{\bar{0}\}$$

$$б) A_3 = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$$

$$в) A_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

4. Какие подмножества образуют подгруппы группы симметрий правильного треугольника:

$$а) A_1 = \{e, a, b\}$$

$$б) A_2 = \{e, c\}$$

$$в) A_6 = \{a, b, c\}$$

5. Какие подмножества образуют подгруппы группы корней шестой степени из единицы?

$$а) A_1 = \{\varepsilon_0, \varepsilon_3\}$$

$$б) A_5 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$$

6. Построить множество смежных классов группы  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  по подгруппе  $\langle 3\mathbb{Z}, + \rangle$ .

7. Построить левостороннее и правостороннее разложение группы симметрий правильного треугольника по подгруппе:

$$а) H_1 = \{e, a, b\}$$

$$б) H_3 = \{e, d\}$$

8. Построить множество смежных классов группы  $Z_8$  по подгруппе  $H_1 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ .

9. Построить множество смежных классов группы корней шестой степени из единицы по подгруппе  $H_1 = \{\varepsilon_0, \varepsilon_3\}$ .

10. Составить таблицу умножения для фактор-группы:

$$а) \text{ группы } \langle \mathbb{Z}, + \rangle \text{ по подгруппе } \langle 3\mathbb{Z}, + \rangle$$

$$б) \text{ группы } Z_8 \text{ по подгруппе } H_2$$

$$в) \text{ группы корней шестой степени из единицы по подгруппе } H_2$$

## Подкольцо. Идеал кольца. Классы вычетов по идеалу. Фактор-кольцо

1. Проверить, верно ли, что в кольце  $\langle Z, +, \cdot \rangle$  подмножество  $2Z = \{2k, k \in Z\}$  является и подкольцом, и идеалом.

2. Пусть  $C = \langle \{a + bi, a, b \in R\}, +, \cdot \rangle$  – кольцо комплексных чисел;  $Z[i] = \{a + bi, a, b \in Z\}$  – множество целых гауссовых чисел. Подкольцом или идеалом в кольце комплексных чисел является множество  $Z[i]$ ?

3. Будут ли нижеприведенные множества подкольцами или идеалами ниже указанных колец?

а) множество  $Z$  целых чисел в кольце  $Z[i]$

б) множество  $Z[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}, a, b \in Z\}$  в кольце действительных чисел

в) множество  $A_5 = \{a + b\sqrt{3}, a, b \in 5Z\}$  в кольце  $Z[\sqrt{3}]$

г) множество  $A_3 = \{a + bi, a, b \in 3Z\}$  в кольце  $Z[i]$

4. Проверить, что множества  $A_1 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$  и  $A_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$  образуют идеалы в кольце  $Z_8$ .

5. Построить классы вычетов кольца  $Z$  по идеалу  $2Z$ .

6. Построить классы вычетов кольца  $Z_8$  по идеалу  $I_1 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ .

7. Построить классы вычетов кольца  $Z_6$  по идеалу  $I_3 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ .

8. Построить фактор-кольцо:

а) кольца  $Z$  по идеалу  $2Z$

б) кольца  $Z$  по идеалу  $5Z$

9. Построить фактор-кольцо кольца  $Z_8$  по идеалу  $I_1$ .

10. Построить фактор-кольцо кольца  $Z_6$  по идеалу  $I_3$ .

## Гомоморфные отображения групп, колец и полей

1. Даны отображения  $R$  в  $R$ . Какие из них являются гомоморфными (изоморфными)?

а)  $x \rightarrow x^2$

б)  $x \rightarrow -x$

в)  $x \rightarrow |x|$

2. Какие из следующих отображений являются гомоморфными (изоморфными) отображениями указанных алгебр?

а)  $f: \langle Z, + \rangle \rightarrow \langle Z, + \rangle \quad f(a) = a + 1$

б)  $f: \langle Z, + \rangle \rightarrow \langle Z, + \rangle \quad f(a) = 2a$

$$в) f: \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle \rightarrow \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle \quad f(a) = \frac{1}{a}$$

3. Какие из следующих отображений являются гомоморфизмами указанных колец?

$$а) f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_5 \quad f(k) = \bar{k}$$

$$б) f: M(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$$

$$в) f: \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a + b$$

$$г) f: \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a$$

4. Доказать, что отображение  $h: G_1 \rightarrow G_2$ , где  $G_1 = \langle \{2^x, x \in \mathbb{Z}\}, \cdot \rangle$ ,  $G_2 = \langle \mathbb{Q}, + \rangle$ , является гомоморфизмом. Определить его свойства.

5. Доказать, что отображение  $h: G_1 \rightarrow G_2$ , где  $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ,  $G_2 = \langle \{2^x, x \in \mathbb{Z}\}, \cdot \rangle$ , является гомоморфизмом. Определить его свойства.

6. Доказать, что отображение  $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow D$ , где  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \langle \{a + b\sqrt{3}\}, +, \cdot \rangle$ ,  $D = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z} \right\}, +, \cdot \right\rangle$ , является гомоморфизмом.

7. Дано отображение  $f: \langle \mathbb{R}, + \rangle \rightarrow \langle \{z \mid |z| = 1\}, \cdot \rangle$ ,  $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ . Доказать, что  $f$  – гомоморфизм и найти ядро гомоморфизма.

8. Дано отображение  $f: \langle \{A \mid |A| \neq 0\}, \cdot \rangle \rightarrow \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ . Доказать, что  $f$  – гомоморфизм и найти ядро гомоморфизма.

### Алгебра высказываний. Равносильные и тождественно-истинные формулы алгебры высказываний.

[7] Часть 2. Задачи из § 1.

[9] Задачи из § 1, § 2.

[8] Глава 1. Задачи из § 1, § 2.

### Алгебра высказываний. Классы А, В, С, L, М булевых функций. Исследование булевых функций, их принадлежность классам.

[7] Часть 2. Задачи из § 2.

[9] Задачи из § 3, § 4, § 5.

### Алгебра высказываний. Исследование систем булевых функций на полноту.

[8] Глава 1. Задачи из § 3.

[7] Часть 2. Задачи из § 2.

[9] Задачи из § 6.

Исследовать системы на полноту:

$$1. S = (C \cap L) \cup (A \setminus B) \cup (L \setminus C)$$

1.  $f_1 \in A \cap B \cap L$
2.  $S = \{f_1, f_2\}$ 
  2.  $f_2 \in M \setminus C$
  3.  $f_1 \leftrightarrow f_2 \equiv 1$
3.  $S = \{f_1, f_2\}$ 
  1.  $f_1 \in M \cap L$
  2.  $f_2 \notin C \cap L$
  3.  $f_1 \leftrightarrow \overline{f_2} \equiv 0$
4.  $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ 
  1.  $f_1 \notin A \cap B \cap L$
  2.  $f_2 \in M \setminus L$
  3.  $f_1 \rightarrow f_2 \equiv 1$
  4.  $f_1 \vee f_3 \equiv 0$

**Исчисление высказываний. Выводимость формул в исчислении высказываний. Выводимость из гипотез.**

[7] Часть 2. Задачи из § 3.

[8] Глава 1. Задачи из § 4.

**Исчисление высказываний. Теорема дедукции. Логические задачи на проверку правильности вывода, на построение вопроса и на равносильные преобразования.**

[7] Часть 2. Задачи из § 3.

[8] Глава 1. Задачи из § 1, § 2, § 3, § 4.

**Логика предикатов. Равносильные формулы логики предикатов. Общезначимость и выполнимость формул.**

[9] Задачи из § 12.

[7] Часть 2. Задачи из § 4, § 5.

[8] Глава 2. Задачи из § 1, § 2.

**Логика предикатов. Специализированные кванторы. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений. Построение отрицаний**

[9] Задачи из § 12.

[7] Часть 2. Задачи из § 4, § 5.

[8] Глава 2. Задачи из § 1, § 2.

**Принцип метода математической индукции. Алгоритм метода математической индукции. Применение метода математической индукции для доказательства утверждений, зависящих от натурального параметра  $n$ .**

[15]: с. 28– №1.7.1-1.7.15;

[16]: с. 19– №4.6-4.10.

**Комбинаторика. Правила суммы и произведения. Размещения без повторений и с повторениями. Перестановки без повторений и с повторениями. Сочетания с повторениями и без повторений. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.**

[11]: с. 32– №1-36.

**Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Способы решения рекуррентных соотношений. Суммы и рекуррентности. Преобразования сумм. Кратные суммы. Некоторые методы суммирования.**

[13]: №1-5, 39-41, 44-46, 82-84, 88, 89, 90, 94-98, 100, 101-107.

[20]: с.83-85 – №11, 13-15, 20-23, 28.

**Основные понятия теории графов. Определение и разновидности графов. Способы задания графов. Изоморфизм графов. Подграф и часть графа. Клика. Звезда вершины графа. Операции над графами. Маршруты, цепи, циклы. Связность. Нахождение сильных**



компонент орграфа. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер. Метрические характеристики графа. Понятие сети. Матрица весов. Нахождение кратчайших путей в ориентированной сети с помощью алгоритма Дейкстры и Беллмана-Мура. Деревья и их свойства, лес. Задача об остове экстремального веса. Алгоритм Прима. Эйлеровы циклы и цепи. Эйлеровы графы. Необходимые и достаточные условия существования эйлерова цикла в графе. Алгоритм Флери. Гамильтоновы графы и циклы. Необходимые и достаточные условия существования гамильтонова цикла в графе. Задача коммивояжера. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ. Планарные графы. Укладка графа. Теорема Эйлера, теорема Понтрягина-Куратовского. Понятие искаженности и толщины непланарных графов. Алгоритм укладки графа на плоскости. Раскраски графов. Хроматические графы. Алгоритм последовательной раскраски графа.

[12]: с. 112 – №3.9.1-3.9.10; с. 128 – №3.14.1 (1,2); с. 132 – №3.14.2 (1,2); с. 151 – № 3.19.1 (1,2), 3.19.2, 3.19.5; с. 172 – №3.23.3,3.23.5,3.23.6, 3.23.8, 3.23.10.

**Основные понятия. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм Форда-Фалкерсона построения максимального потока и минимального разреза. Поток минимальной стоимости. Математическая модель задачи и ее общее решение.**

[12]: с.198– №3.29.1 (1-4), 3.29.2 (1, 2).

### 6.3. Тематика и задания для лабораторных занятий

Лабораторные занятия отсутствуют.

### 6.4. Методические рекомендации для выполнения курсовых работ (проектов)

Тематика курсовых работ определяется преподавателем, являющимся руководителем работы. Темы курсовых работ по алгебре могут касаться разделов, не входящих в курс, а могут расширять и углублять знания студента по вопросам, изучавшимся на лекциях и практических занятиях.

#### Алгебра и теория чисел

1. Отображения и фактор-множества.
2. Отношения эквивалентности.
3. Отношения порядка.
4. Формула Бине-Коши.
6. Системы линейных неравенств.
7. Итерационные методы решения систем линейных уравнений.
8. Число действительных корней многочлена с действительными коэффициентами.
9. Основная теорема алгебры.
10. Основная теорема о симметрических многочленах.
11. Решение алгебраических уравнений в радикалах (история вопроса).
12. Конечные поля.
13. Элементы теории конечных полей.
14. Неприводимые многочлены над конечными полями.
15. Уравнение  $x^3 = x$  в кольце классов вычетов  $Z_m$
16. Алгебра кватернионов и ее приложения.
17. Замыкания и соответствия Галуа.
18. Функция Мёбиуса и её свойства.
19. Неприводимые кривые 2-го порядка.
20. Кольцо  $Z[\omega]$  и его арифметика.
21. Кубический закон взаимности.
22. Магические квадраты.
23. Треугольник Паскаля: его свойства и приложения.
24. Числа Фибоначчи и их приложения.

25. Рекуррентные последовательности и числа Фибоначчи.
26. Реологические числа и их некоторые алгебраические свойства.
27. Греко-китайская теорема об остатках.
28. Линейные группы.
29. Группы перестановок.
30. Конечные абелевы группы.
31. Копредставления групп.
32. Силовские подгруппы.

### **Математическая логика**

33. Логическая игра.
34. Неразрешимость логики первого порядка.
35. Нестандартные модели арифметики.
36. Метод диагонализации в математической логике.
37. Машины Тьюринга и невычислимые функции.
38. Вычислимость на абаке и рекурсивные функции.
39. Представимость рекурсивных функций и отрицательные результаты математической логики.
40. Разрешимость арифметики сложения.
41. Логика второго порядка и определимость в арифметике.
42. Метод ультрапроизведений в теории моделей.
43. Теорема Геделя о неполноте формальной арифметики.
44. Разрешимые и неразрешимые аксиоматические теории.
45. Интерполяционная лемма Крейга и ее приложения.

### **Дискретная математика**

46. Эйлеровы графы.
47. Гамильтоновы графы.
48. Связность графа.
49. Циклы в графах.
50. Плоские графы.
51. Деревья.
52. Свойства эйлеровых графов.
53. Свойства гамильтоновых графов.
54. Раскраски графов.
55. Ориентированные графы.
56. Паросочетания.
57. Теория трансверсалей.
58. Потоки в сетях.
59. Производящие функции в теории графов.
60. Теорема Пойа и перечисление графов.
61. Графы на двумерных поверхностях.
62. Конечные группы и их графы.
63. Теорема Рамсея и ее приложения.
64. Полугруппы преобразований.
65. Полугруппы в биологии.
66. Копредставления полугрупп.
67. Логика на словах.
68. Алгебры отношений и полугруппы преобразований.
69. Рациональные языки.
70. Соответствие Эйленберга.
71. Отношения Грина.
72. Декомпозиция конечных моноидов.
73. Рациональные и алгебраические языки над полукольцами.
74. Элементы теории конечных автоматов.
75. Минимизация чистых автоматов.
76. Конструкции чистых автоматов.
77. Цифровое шифрование.

78. Последовательности над конечным полем  
 79. Линейные коды.  
 80. Решетки.  
 81. Модулярные и дистрибутивные решетки  
 82. Булевы алгебры.  
 83. Минимальные формы булевых многочленов.  
 84. Приложения булевых алгебр к переключательным схемам.

При оформлении текстовых документов следует руководствоваться документом: «Правила оформления текстовых документов: руководящий документ по оформлению рефератов, отчетов о лабораторных работах, практиках, пояснительных записок к курсовым проектам и выпускным квалификационным работам / А. В. Басова, С. В. Боженко, Т. Н. Вахнина, И. Б. Горланова, И. А. Делекторская, А. А. Титунин, О. В. Тройченко, С. А. Угрюмов, С. Г. Шарабарина; под общ. ред. О. В. Тройченко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Кострома: Изд-во Костром. гос. ун-та, 2017. – 47 с.»

## 7. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

№	Литература	Кол-во книг
<b>а) Основная литература</b>		
1	Кострикин, А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2009. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=63140">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=63140</a>	2 ЭР
2	Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - Москва : МЦНМО, 2009. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=63144">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=63144</a>	ЭР
3	Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - Москва : МЦНМО, 2009. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=62951">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=62951</a>	ЭР
4	Судоплатов, С.В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебник для вузов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. - Москва; Новосибирск : НГТУ, 2008. - 224 с. - МО РФ напр. 654600 - Информатика и вычислительная техника, 654700-Информационные системы, 540200-Физико-математическое образование. - ЕН. - ISBN 978-5-16-001975-8; 978-5-7782-0458-4 : 248.00; 140.03.	50
5	Судоплатов, С.В. Дискретная математика: учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. – Москва; Новосибирск: Инфра-М – НГТУ, 2007. – 256 с. – (Высш. образование). – МО РФ. – ЕН. – ISBN 5-16-002299-6. – ISBN 5-7782-0466-3: 104.00. <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=135675&amp;sr=1">http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=135675&amp;sr=1</a>	84 ЭБ
<b>б) Дополнительная литература</b>		
1	Матыцина, Татьяна Николаевна. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / Т. Н. Матыцина, Е. К. Коржевина ; М-во образования и науки Российской Федерации, Костромской гос. ун-т им. Н. А. Некрасова. - Электрон. текст. дан. - Кострома : КГУ, 2014. - 151 с. - Загл. с экрана. - ISBN 978-5-7591-1432-1 : Б. ц.	ЭБ
2	Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. - Изд. 3-е. - Москва : Наука, 1966. - 381 с. : ил. ; То же [Электронный	8 ЭБ

	ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=464077">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=464077</a> (22.02.2018).	
3	Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре [Электронный ресурс] : учеб. / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 288 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/399">https://e.lanbook.com/book/399</a> — Загл. с экрана.	1 ЭБ
4	Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. "Математика", "Математика и физика", "Физика и математика" : допущено М-вом просвещения СССР / Л. Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.: ил. – Библиогр.: с. 544. –Предм. указ.: с. 545-551. – 1.10.	20
5	Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие/ В.И. Игошин. — М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. — 392 с. — (Бакалавриат). <a href="http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=524332">http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=524332</a>	ЭБ
6	Шапорев, Сергей Дмитриевич. Математическая логика : курс лекций и практических занятий : [учеб. пособие для студ. вузов] : допущено науч.-метод. советом / Шапорев, Сергей Дмитриевич. - СПб. : БХВ-Петербург, 2007. - 416 с. - Библиогр.: с. 405. - Предм. указ.: с. 406-410. - ISBN 978-5-94157-702-6 : 157.00.	30
7	Чередникова, А. В. Дискретная математика: теория и практика: учеб. пособие для вузов / А.В. Чередникова, О.Б. Садовская, Л.А. Каминская. – Кострома: КГТУ, 2012; 2011. – 75 с.: рис. – обязат. – ISBN 978-5-8285-0585-2: 6.93. Электронная библиотека КГУ <a href="#">Дискретная математика: теория и практика 227484</a>	66  ЭБ
8	Шапорев, С.Д. Дискретная математика: курс лекций и практических занятий: учеб. пособие для студ. вузов: допущено. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с. – Предм. указ.: с. 393-396. – ISBN 978-5-94157-703-3: 227.00.	30
9	Матьцина, Т.Н. Дискретная математика. Решение рекуррентных соотношений: практикум / М-во образования и науки Российской Федерации, Костромской гос. ун-т им. Н. А. Некрасова. – Кострома: КГУ, 2010. – 33, [2] с. – Библиогр.: с. 34. – 2.70. <a href="#">Maticina diskretn matem</a>	22  ЭБ
10	Чередникова, А.В. Введение в теорию графов: учеб.-метод. пособие / А.В. Чередникова, И.В. Землякова. – Кострома: КГТУ, 2012. – 28 с. – ЕН. – обязат. – б.ц. Электронная библиотека КГУ <a href="#">Введение в теорию графов 227510</a>	23  ЭБ
11	Матьцина, Т.Н. Дискретная математика. Основы теории графов учебно.-методическое пособие [Текст] / Т. Н. Матьцина - Кострома : КГУ, 2013. - 111 с.	20

## 8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Электронные библиотечные системы:

1. ЭБС Университетская библиотека онлайн - <http://biblioclub.ru>
2. ЭБС «Лань» <https://e.lanbook.com>
3. ЭБС «ZNANIUM.COM» <http://znanium.com>
4. Библиотека КГУ <http://library.ksu.edu.ru/>

## 9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Лекционные занятия проводятся в аудиториях с требуемым числом посадочных мест, оборудованные мультимедиа. Необходимое программное обеспечение – офисный пакет.

Практические занятия проводятся в аудиториях с требуемым числом посадочных мест, в аудитории должна быть доска, мел или маркеры.